Derivación numérica

Segundo semestre

Hito 3

Fecha de entrega: 21.04.17

Yago Pego Martínez ([yago.pego.martinez@alumnos.upm.es](mailto:yago.pego.martinez@alumnos.upm.es))

Evaristo de Vega Galindo ([evaristo.devega.galindo@alumnos.upm.es](mailto:evaristo.devega.galindo@alumnos.upm.es))

**Enunciado**

1. Obtener las fórmulas de las derivadas numéricas primeras descentradas, con tres puntos equiespaciados a una distancia .
2. A partir de la función en el punto , representar gráficamente el error total de las derivadas numéricas frente al valor de ,en precisión simple y doble. En particular, representar gráficamente las derivadas primeras adelantada (definición de derivada), centrada y descentradas y la derivada segunda, con tres puntos equiespaciados a una distancia . Discutir los resultados obtenidos.
3. Resolver los problemas de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

* Problema 1:

, , ,

* Problema 2:

, , ,

Para los problemas citados anteriormente se pide:

1. A partir de las derivadas numéricas con tres puntos equiespaciados escribir el sistema de ecuaciones resultante.
2. Obtener la solución numérica mediante la resolución de un sistema lineal de ecuaciones, con *N* = 10 y *N* = 100.
3. Representar gráficamente los resultados obtenidos.

**Explicación razonada**

1. *Obtener las fórmulas de las derivadas numéricas primeras descentradas, con tres puntos equiespaciados a una distancia .*

Sean tres puntos equiespaciados una distancia sobre la recta real:

Se cumple que

En un caso general no lineal, las imágenes de la función en estos puntos no se hallarán en una misma recta. Será necesario aproximar la función. Lo haremos a través de un interpolante :

, interpolante para tres puntos equiespaciados, es equivalente a:

, donde:

Aplicando los cambios anteriores resulta:

Esta es la función-aproximación por interpolante a tres puntos h equiespaciados.

*De ahora en adelante se escribirá , ó como , y .*

Queremos a continuación conocer el valor de la derivada en cada uno de estos tres puntos. Utilizamos de nuevo nuestra función aproximativa, que derivamos:

*Expresión general para la derivada*

Deseamos obtener las fórmulas de las derivadas numéricas primeras en los tres puntos (central y descentrados). Bastaría con sustituir en la expresión anterior, pero, para hacer las sustituciones más fáciles de comprender, escribiremos una serie de relaciones básicas:

— —

— —

—

Con estas sencillas relaciones resulta trivial obtener el valor de la derivada en cada uno de los tres puntos:

1. *A partir de la función en el punto , representar gráficamente el error total de las derivadas numéricas frente al valor de , en precisión simple y doble. En particular, representar gráficamente las derivadas primeras adelantada (definición de derivada), centrada y descentradas y la derivada segunda, con tres puntos equiespaciados a una distancia . Discutir los resultados obtenidos.*

La tabla a continuación relaciona el error obtenido en precisión simple con el incremento () empleado, utilizando las derivadas anteriores para la función en :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-5 | 10-6 | 10-7 |
| DPC | 1.668E-3 | 1.693E-5 | 1.681E-5 | 1.659E-4 | 1.358E-3 | 1.652E-2 | 1.921E-1 |
| DPDI | 3.595E-3 | 3.076E-5 | 4.661E-5 | 1.659E-4 | 1.358E-3 | 1.059E-1 | 1.921E-1 |
| DPDS | 3.094E-3 | 3.672E-5 | 4.661E-5 | 1.659E-4 | 1.358E-3 | 4.633E-2 | 1.921E-1 |
| DPA | 5.171E-2 | 5.018E-3 | 5.234E-4 | 1.659E-4 | 1.358E-3 | 4.633E-2 | 1.921E-1 |
| DS | 8.395E-4 | 1.659E-4 | 1.328E-2 | — | — | — | — |

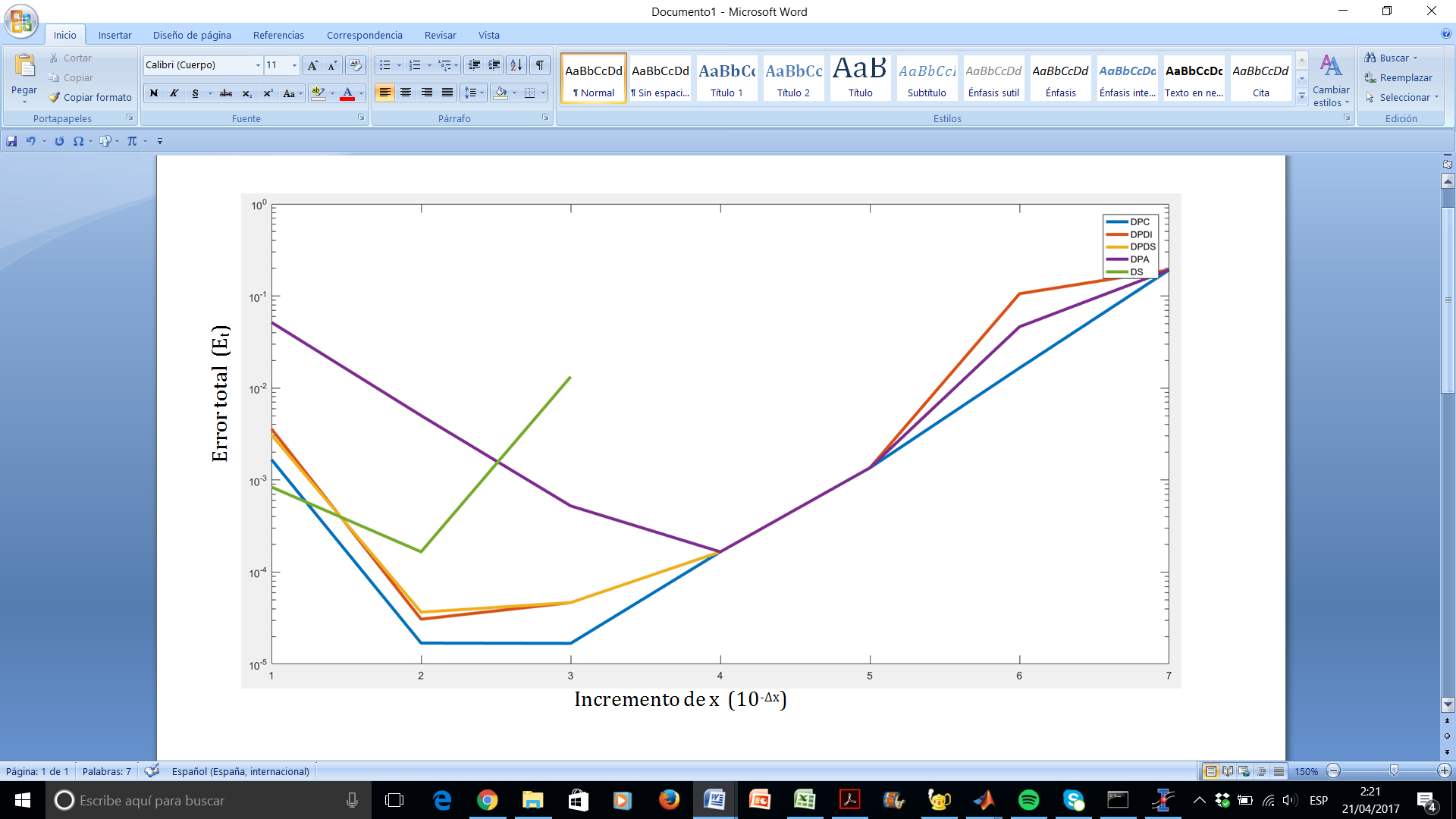
DPC: *derivada primera centrada*

DPDI: *derivada primera descentrada inferior*

DPDS: *derivada primera descentrada superior*

DPA: *derivada primera adelantada (según la definición)*

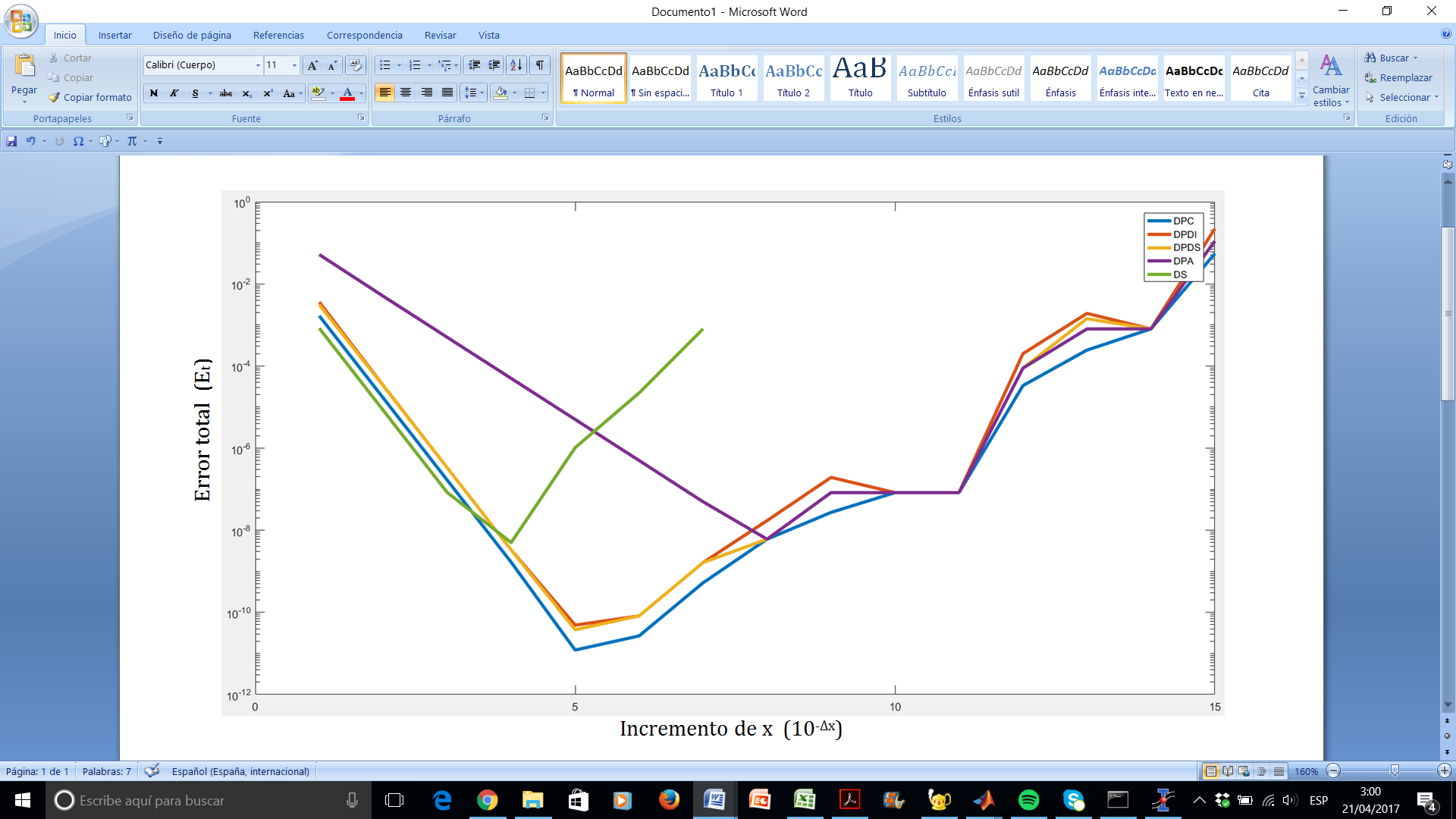
DS: *derivada segunda*

La gráfica correspondiente a los datos de la tabla es:

**PRECISIÓN SIMPLE**

La misma tabla y gráfica se pueden realizar para precisión doble. En este caso, además, el rango del incremento de errores es superior —lo haremos hasta —.

*Evitaremos crear una tabla para precisión doble (por sus grandes dimensiones: 16 x 6) y nos remitiremos directamente a la representación gráfica.*



**PRECISIÓN DOBLE**

*Los resultados obtenidos serán discutidos en la última parte del documento (ver* Conclusiones*).*

1. *Resolver los problemas de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:*

* *Problema 1:*

*, , ,*

* *Problema 2:*

*, , ,*

*Para los problemas citados anteriormente se pide:*

1. *A partir de las derivadas numéricas con tres puntos equiespaciados escribir el sistema de ecuaciones resultante.*
2. *Obtener la solución numérica mediante la resolución de un sistema lineal de ecuaciones, con N = 10 y N = 100.*
3. *Representar gráficamente los resultados obtenidos.*

Para este último apartado será necesaria obtener la segunda derivada de la función aproximativa. Esta resulta de sencilla obtención. Derivando la expresión anterior se tiene:

Para el **problema 1**:

Sustituyendo en la ecuación diferencial original , se obtiene la expresión general para el ejercicio:

Dividiendo el intervalo [-1, 1] en cuatro partes, con puntos equiespaciados, se obtiene el sistema siguiente, donde y son condiciones de contorno (datos conocidos):

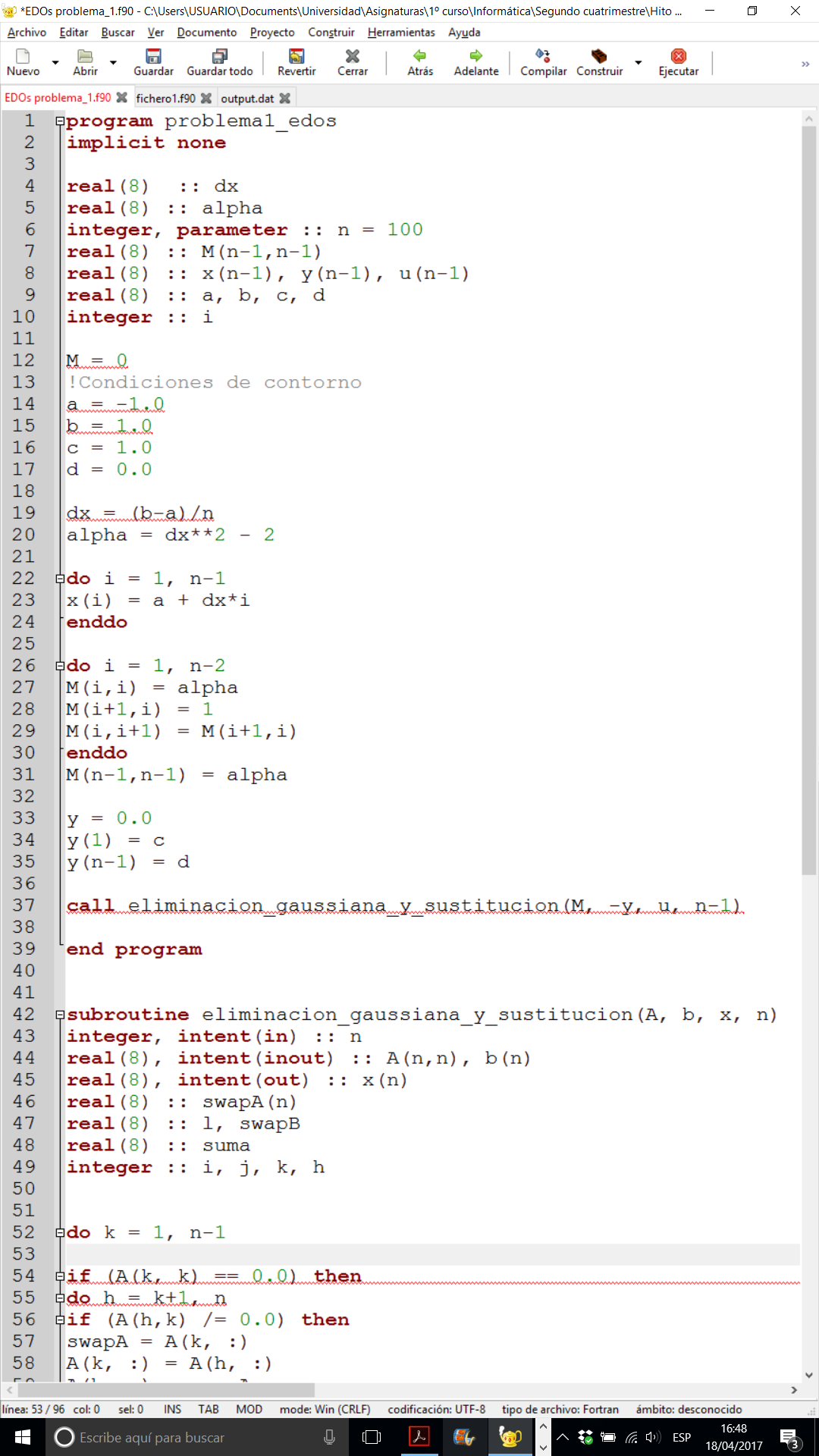
→

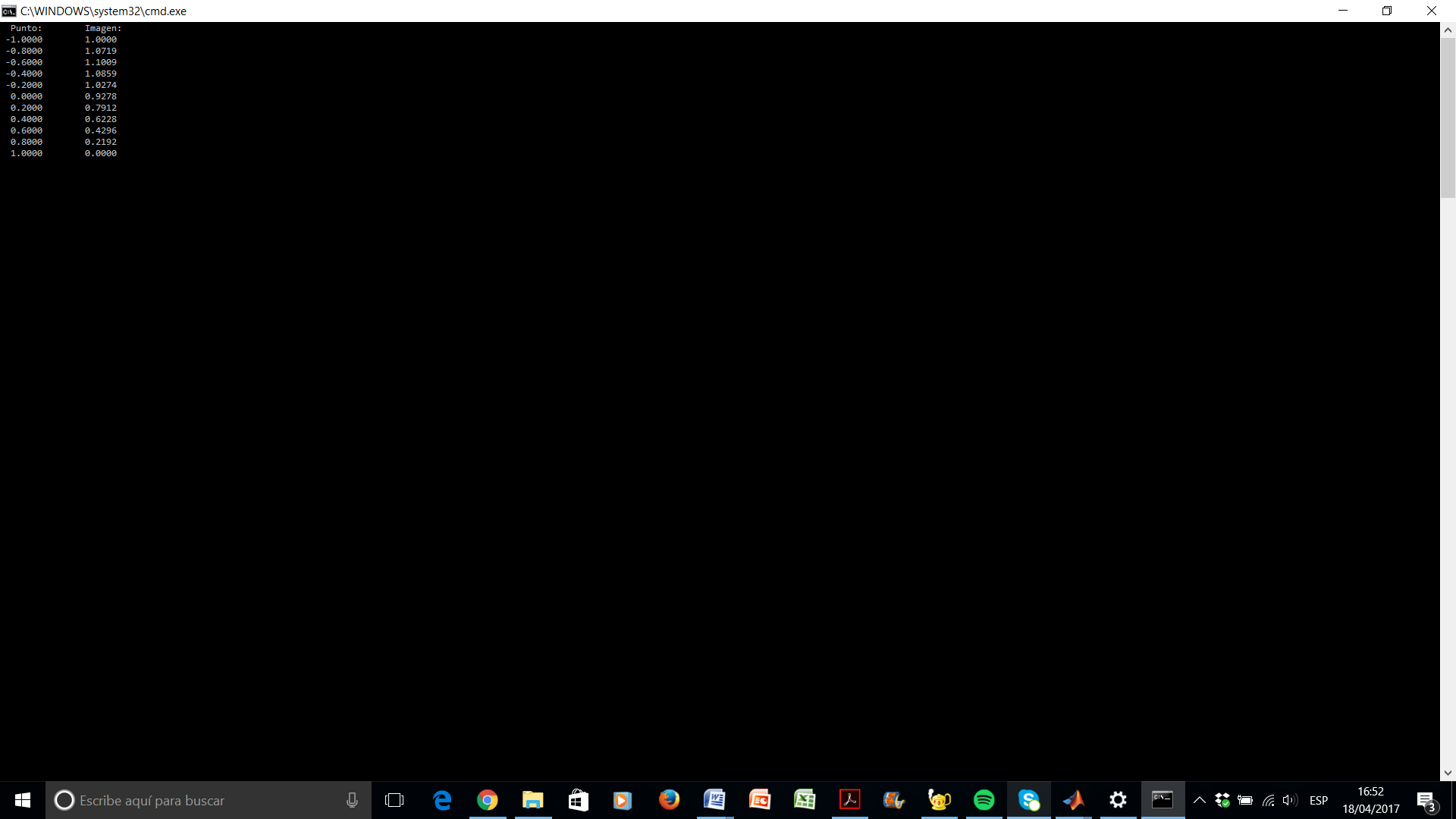
A partir del sistema anterior, y llamando a se puede escribir el sistema en forma matricial:

La matriz anterior es generalizable para un número indefinido de particiones:

Como conocemos y , resolver el problema supondrá dar el valor que corresponde a la imagen de cada uno de los puntos interiores. Obviamente, cuanto mayor sea el número de particiones, más precisa será la aproximación a la función.

Con el siguiente programa, hemos podido resolver la primera ecuación diferencial ordinaria:



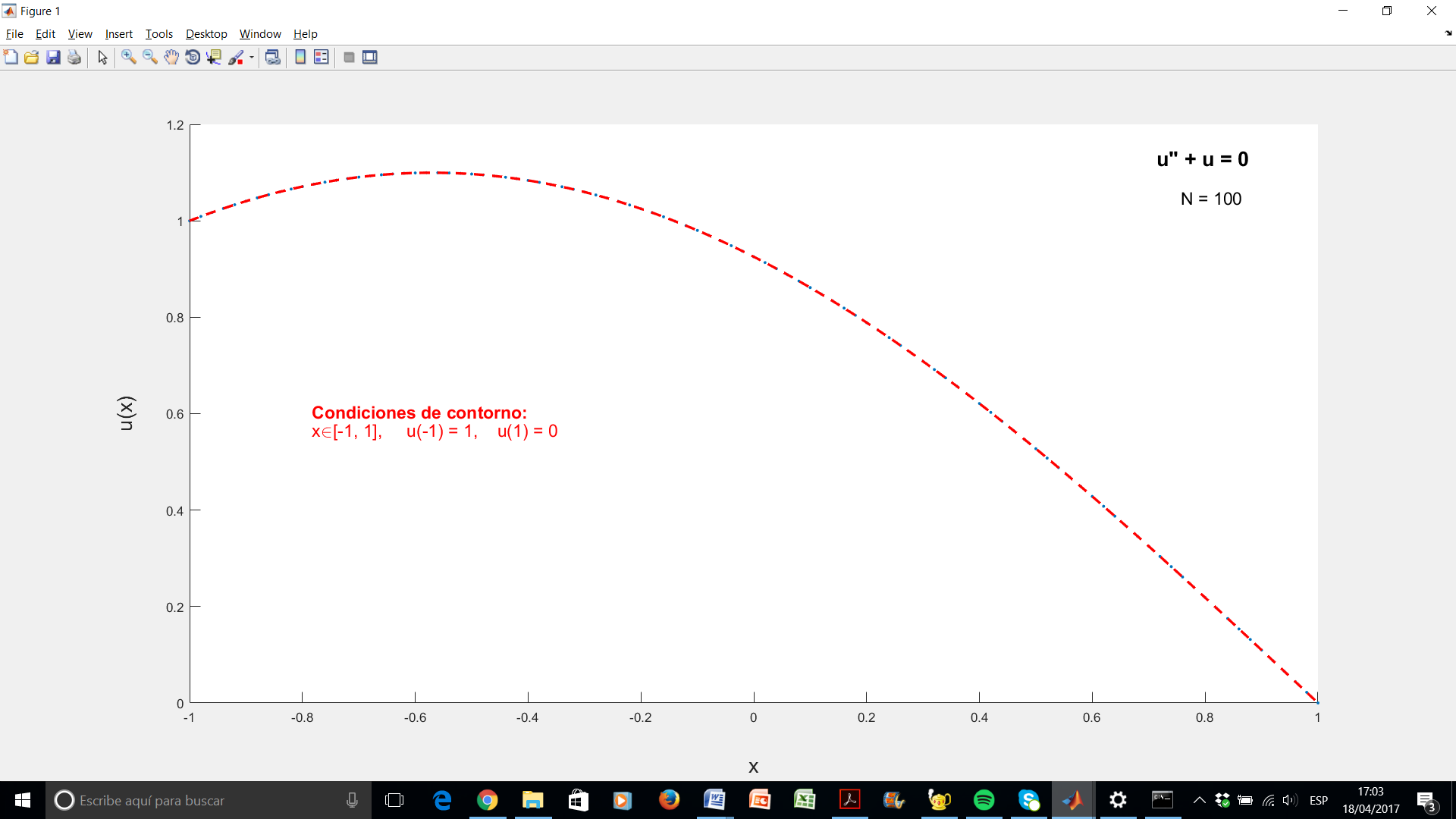
Como pedía el enunciado, hemos resuelto el problema para intervalos con diez y cien particiones:

*Resultados para N = 10*

*La emisión de los resultados para N = 100 será omitida por motivos «tamañísticos»)*

Con los datos obtenidos hemos representado las gráficas:

Para el **problema 2**:

Sustituyendo en la expresión original con las fórmulas de derivación obtenidas en apartados anteriores, tenemos la expresión general para la EDO con tres puntos equiespaciados:

Escribiendo la expresión anterior para los puntos interiores de un intervalo, se obtiene un sistema que se puede escribir de forma matricial:

donde

Como en el problema anterior, el objetivo será obtener la matriz-columna U con los valores de las imágenes de los puntos intermedios. Como entre las condiciones de contorno no se incluye (como sí se hizo en el anterior) el valor de , el sistema no nos permitirá hallar el valor de con i = 1, 2, 3, …, N-2, N-1.

Para conocer esta última condición, queremos primero establecer una relación entre las incógnitas:

En el punto :

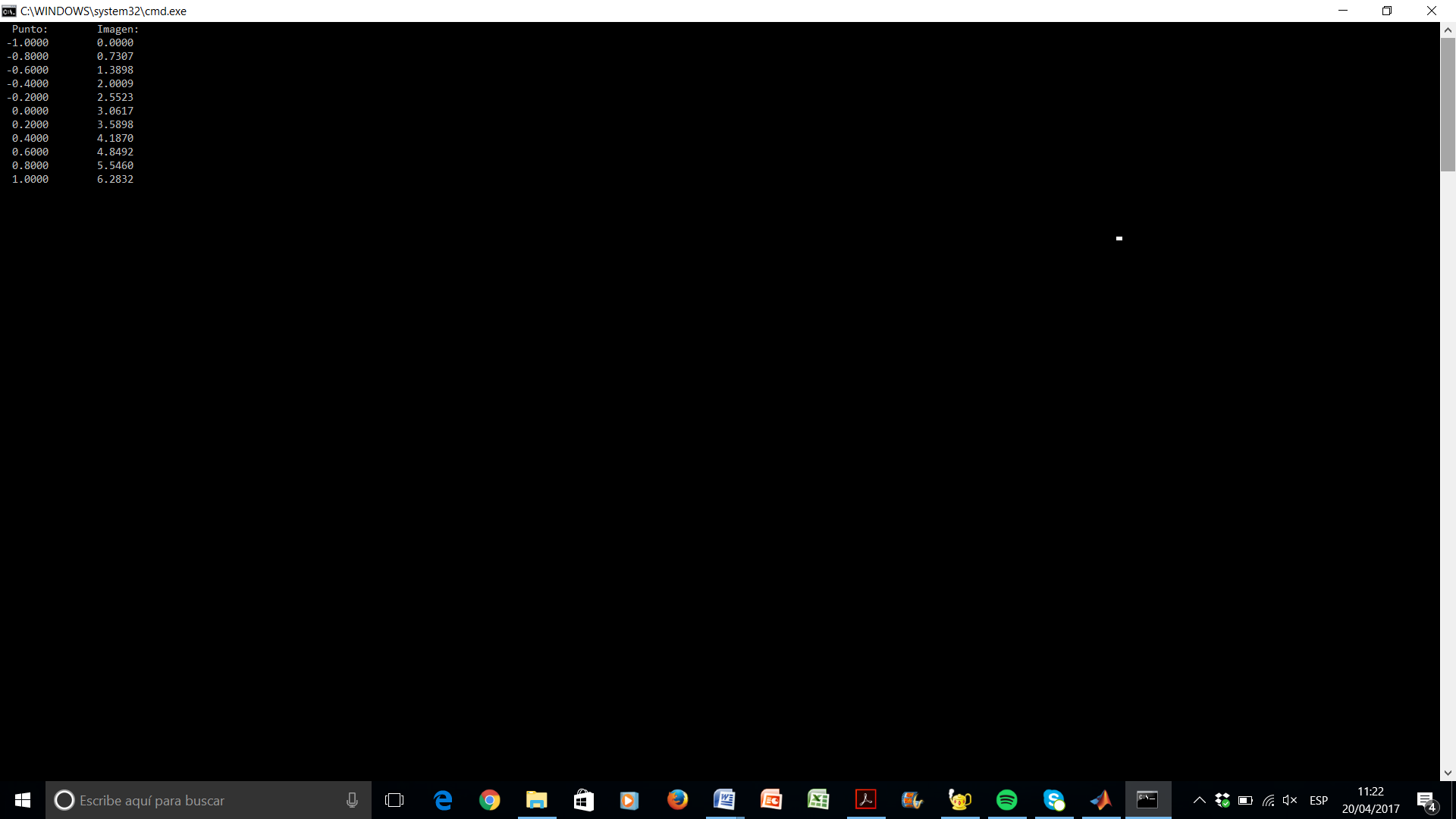
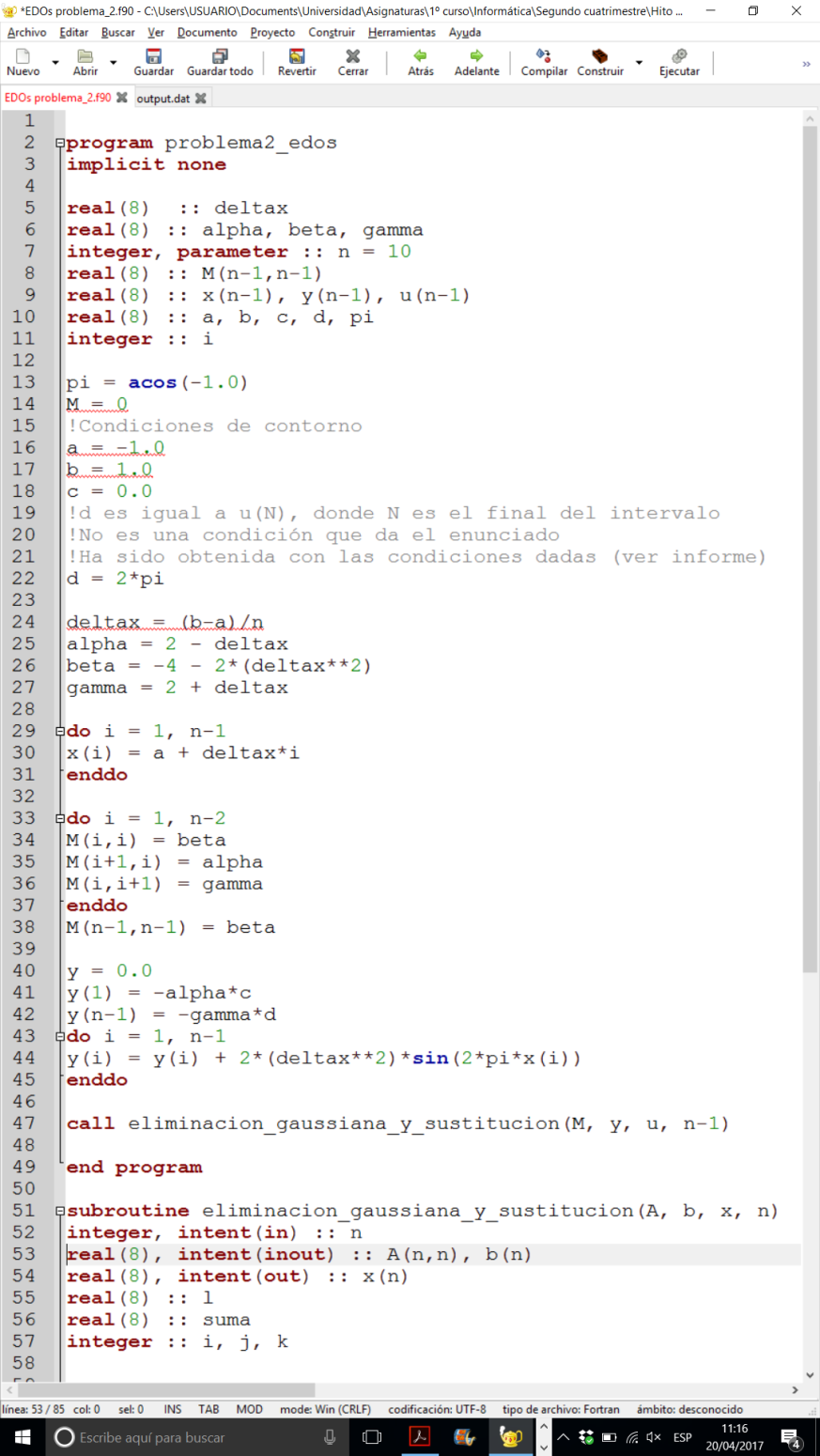
Y derivando la expresión inicial con respecto a se llega a:

Como se dijo anteriormente, la aproximación de la derivada tercera por interpolantes para tres puntos equiespaciados se anula ():

De nuevo, en el punto :

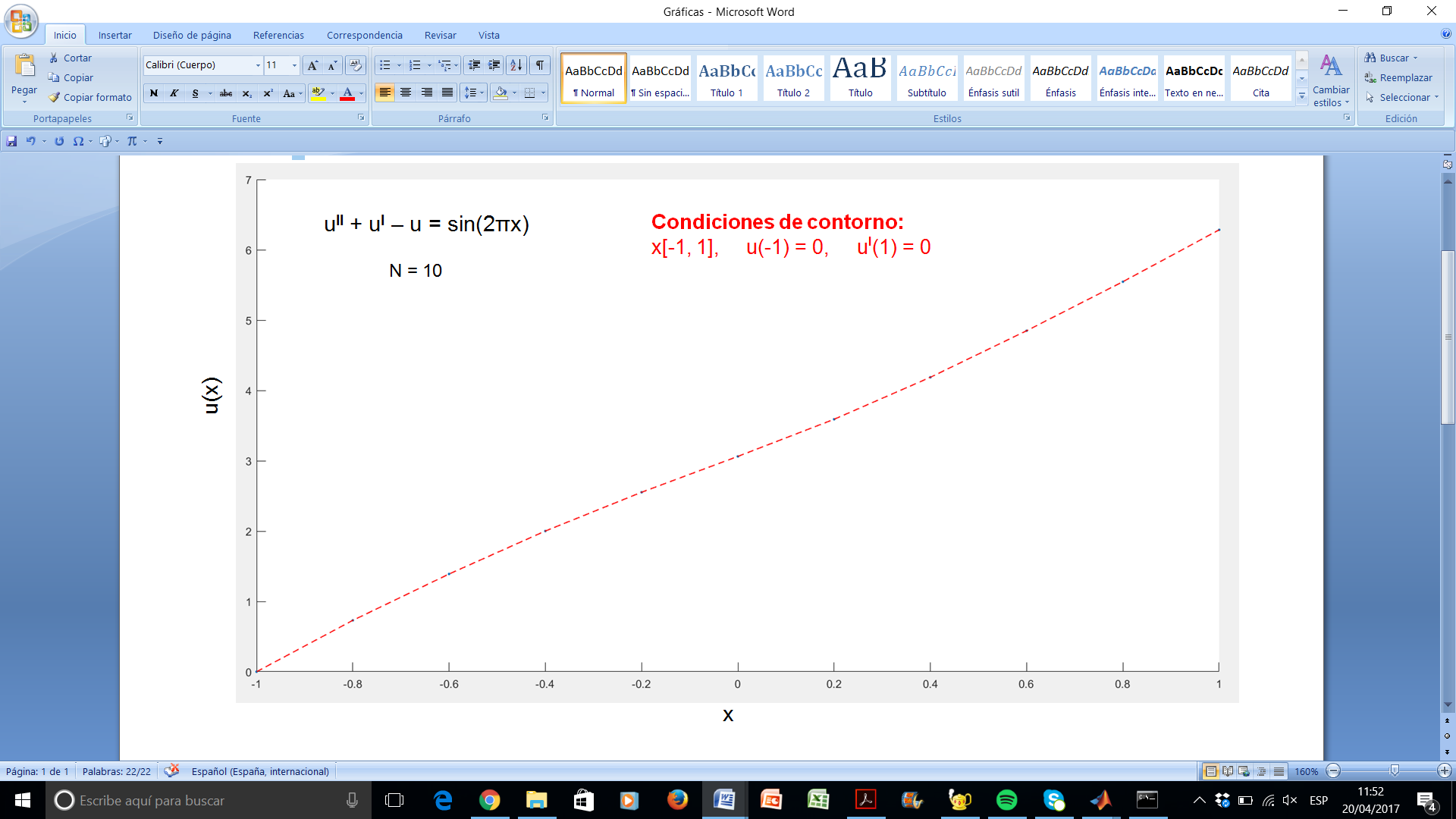
Habiendo obtenido el valor de la función en el otro extremo del intervalo, el sistema planteado previamente es ya resoluble.

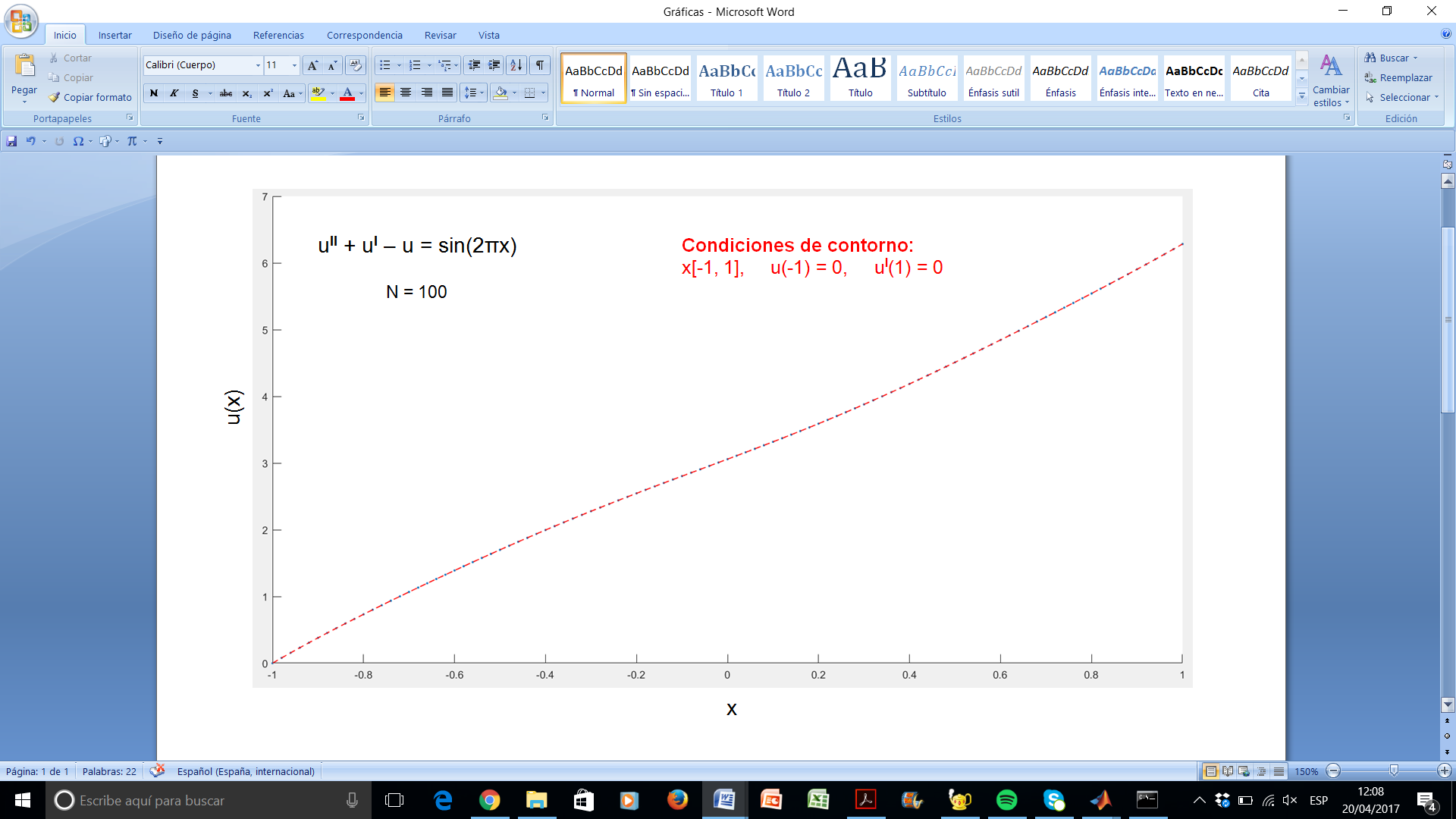
Con un programa similar al del primer problema, hallamos los resultados para un número de particiones determinado:



*La subrutina de resolución del sistema es la misma que la utilizada en hitos anteriores*

*Resultados para N = 10*

He aquí la gráfica de ecuación diferencial ordinaria para diez particiones del intervalo [-1, 1]:



Y la correspondiente a la división del intervalo en cien partes:

**Conclusiones**

- Derivando una función-aproximación por interpolante a n puntos, la última derivada que podremos hacer (sin que sea nula) es la n-1.

Para el **apartado 2**:

- El valor de la derivada segunda se dispara para en precisión simple y en para precisión doble. Esto se debe a que, recordemos, en la fórmula de la segunda derivada por interpolante, aparece . Considerando que los límites numéricos son y para precisiones simple y doble respectivamente, la afirmación primera puede darse por cierta.

- Como era de esperar, el error total para las derivadas en precisión doble es considerablemente menor. Así, en los casos óptimos, el error es del orden de 10-11 para precisión doble y de 10-5 para simple.

- En ambas gráficas, la derivada primera centrada es con la que se obtiene menor error. Se podría afirmar entonces que es la más precisa entre tres puntos equiespaciados.

- En ambas gráficas la derivada según la definición o derivada adelantada es la que presenta mayor error para incrementos mayores. Según se reduce , ésta se equipara a las demás.

- Llama la atención observar que las derivadas primeras descentradas (superior e inferior) tienen una evolución casi idéntica en ambas gráficas.

- Por último, advertimos que, en la gráfica de las derivadas en doble precisión, la segunda derivada es la que presenta menor error en el primer tramo.

Para el **apartado 3**:

- La ecuación diferencial ordinaria se cumple para todo el intervalo dado. Según cuantas particiones realicemos, y con las condiciones de contorno, obtendremos un sistema de más o menos ecuaciones lineales (tantas como puntos resultantes de las particiones).

- Se ve claramente que las gráficas de las EDOs con mayor número de particiones resultan más parecidas a la función correspondiente.